Matematika Ekonomi

KALKULUS TURUNAN

TONI BAKHTIAR
INSTITUT PERTANIAN BOGOR

2012

Statik Komparatif

- Analisis perbandingan titik-titik kesetimbangan terhadap perubahan nilai-nilai parameter dan variabel endogen.
- Model Supply-demand:

$$Q^D = a - bP \qquad (a, b > 0)$$
$$Q^S = -c + dP \qquad (c, d > 0)$$

- SPL di atas dapat diselesaikan dengan mudah sehingga diperoleh

$$P^* = \frac{a+c}{b+d}, \quad Q^* = \frac{ad-bc}{b+d}.$$

- Analisis statik komparatif: Apa yang terjadi dengan P^* dan Q^* jika terjadi perubahan pada a, b, c, dan d?

Statik Komparatif

- Model Pendapatan Nasional

$$
\begin{aligned}
&Y = C + I_0 + G_0 \\
&C = a + b(Y - T) \qquad (a > 0, 0 < b < 1) \\
&T = c + dY \qquad (c > 0, 0 < d < 1)
\end{aligned}
$$

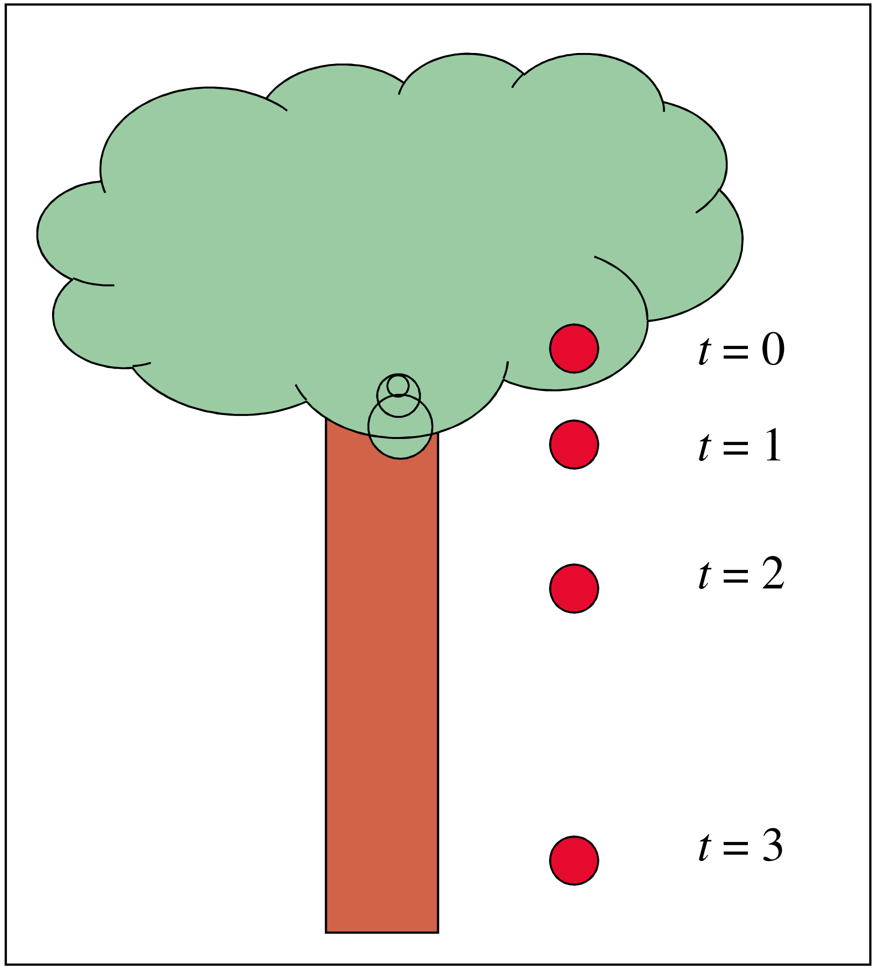
- Parameter: a, b, c, d, variabel endogen: Y (pendapatan), C (konsumsi), T (pajak).
- Diperoleh, misalnya:

$$Y^* = \frac{a - bc + I_0 + G_0}{1 - b + bd}.$$

- Analisis statik komparatif: Apa yang terjadi dengan Y^* jika terjadi perubahan pada G_0, a, b, c, dan d?

Apa Itu Turunan?

- Perhatikan sebuah apel yang jatuh dari pohon yang sangat tinggi
- Hukum fisika menyatakan bahwa setelah t detik, apel berada pada posisi $16t^2$ kaki dari posisi awal.
- Berapa kecepatan apel setelah t detik? Berapa kecepatan apel pada saat $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, dst?



Kecepatan Rata-rata dan Kecepatan Sesaat

- Posisi apel pada saat t ditentukan oleh $S(t) = 16t^2$.
- Kecepatan rata-rata (*average velocity*) adalah:

$$V_{\text{rata-rata}} = \frac{\text{jarak yang ditempuh}}{\text{waktu yang diperlukan}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

- Berapa kecepatan rata-rata:
  - dari $t = 3$ sampai $t = 3.5$
  - dari $t = 3$ sampai $t = 3.1$
  - dari $t = 3$ sampai $t = 3.01$
  - dari $t = 3$ sampai $t = 3.001$
- Berapa kecepatan sesaat pada $t = 3$?

Turunan dan Kecepatan Sesaat

- Kecepatan sesaat pada t = 3 dapat dihitung sbb:

$$\begin{aligned} V_{\text{sesaat}}(3) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(3+\Delta t) - S(3)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(3+\Delta t)^2 - 16 \cdot 3^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(6\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 16(6+\Delta t) = 96 \text{ kaki/detik.} \end{aligned}$$

- Tak lain adalah:

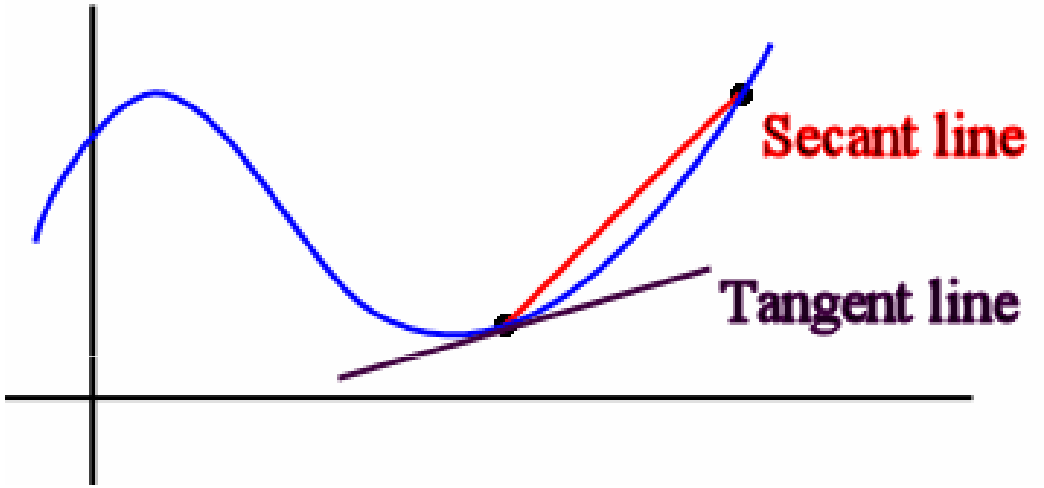
$$V_{\text{sesaat}}(3) = S'(3) = 32t \,|_{t=3} = 96.$$

Turunan dan Kecepatan Sesaat

- Secara umum, turunan fungsi $S = S(t)$ diberikan oleh:

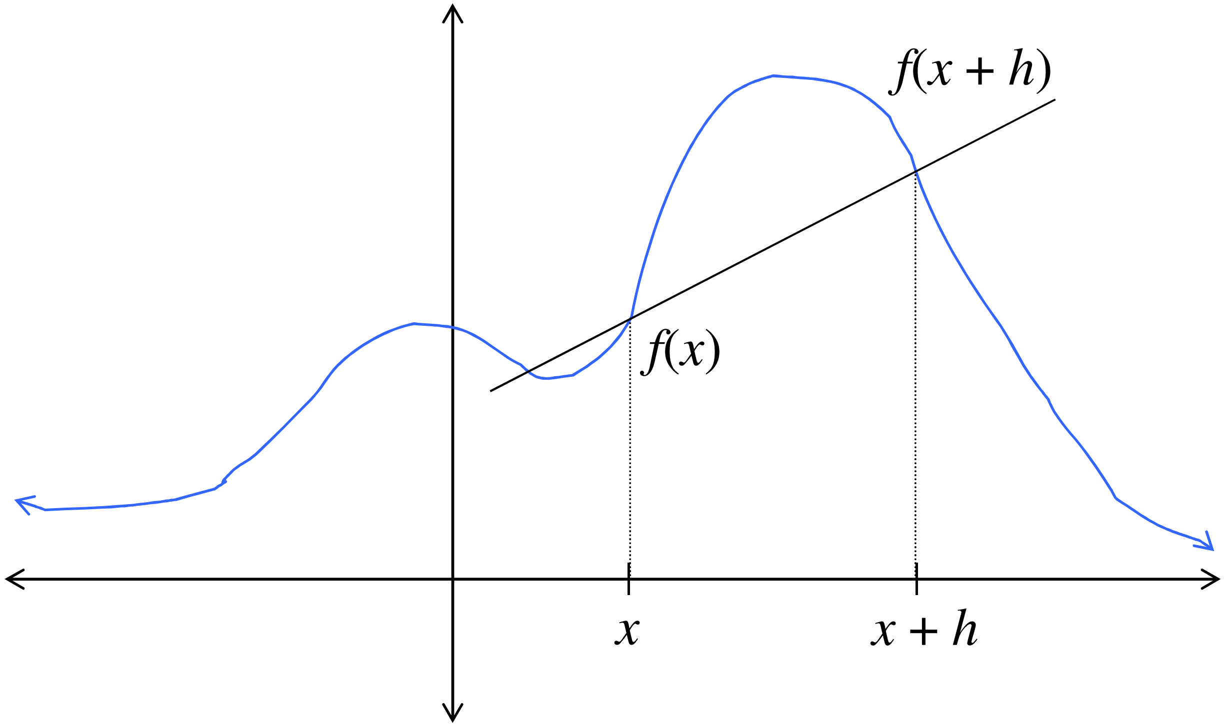
$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Garis Singgung dan Garis Potong



- Garis singgung (*tangent line*) ialah garis lurus yang memotong kurva di satu titik (disebut sbg titik singgung).
- Garis potong (*secant line*) ialah garis lurus yang memotong kurva di lebih dari satu titik

Turunan dan Garis Singgung

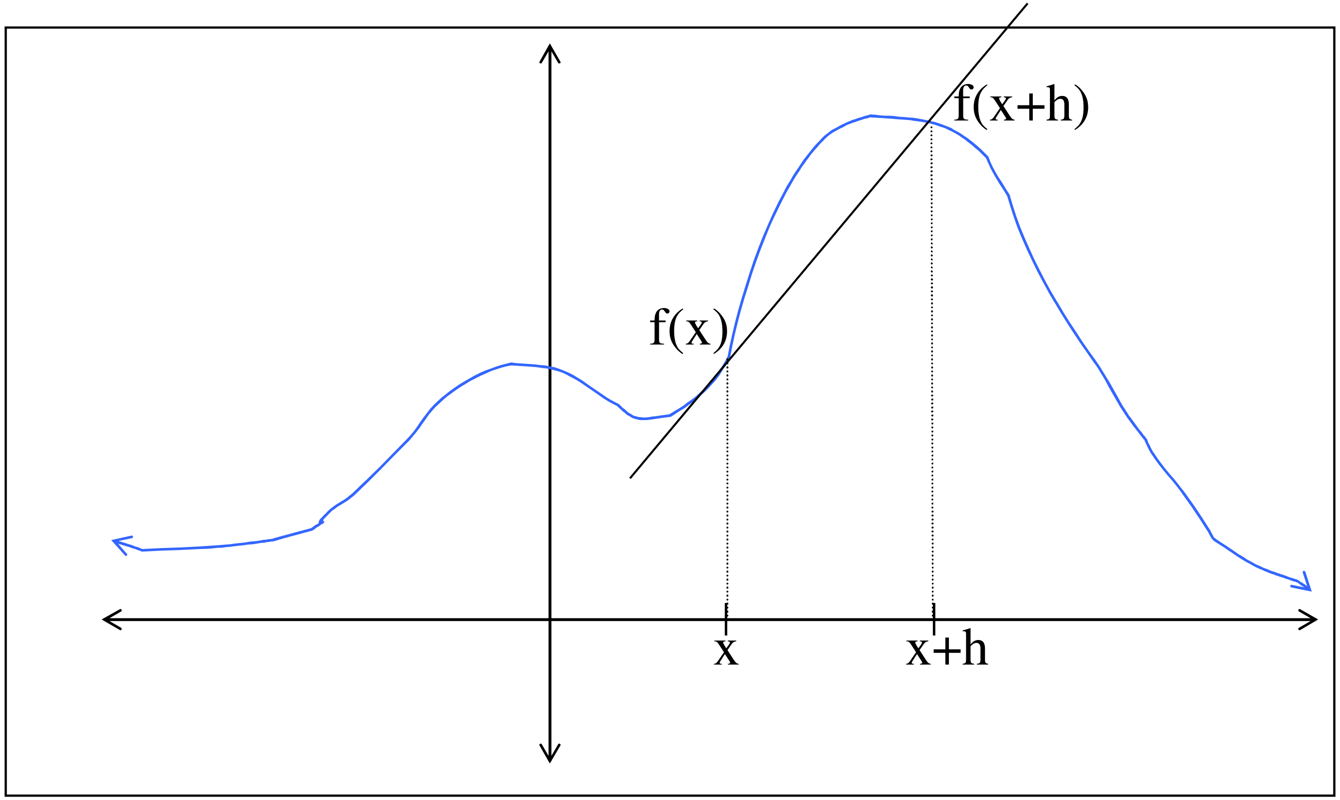


Slope garis potong:

$$m_{\mathrm{GP}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

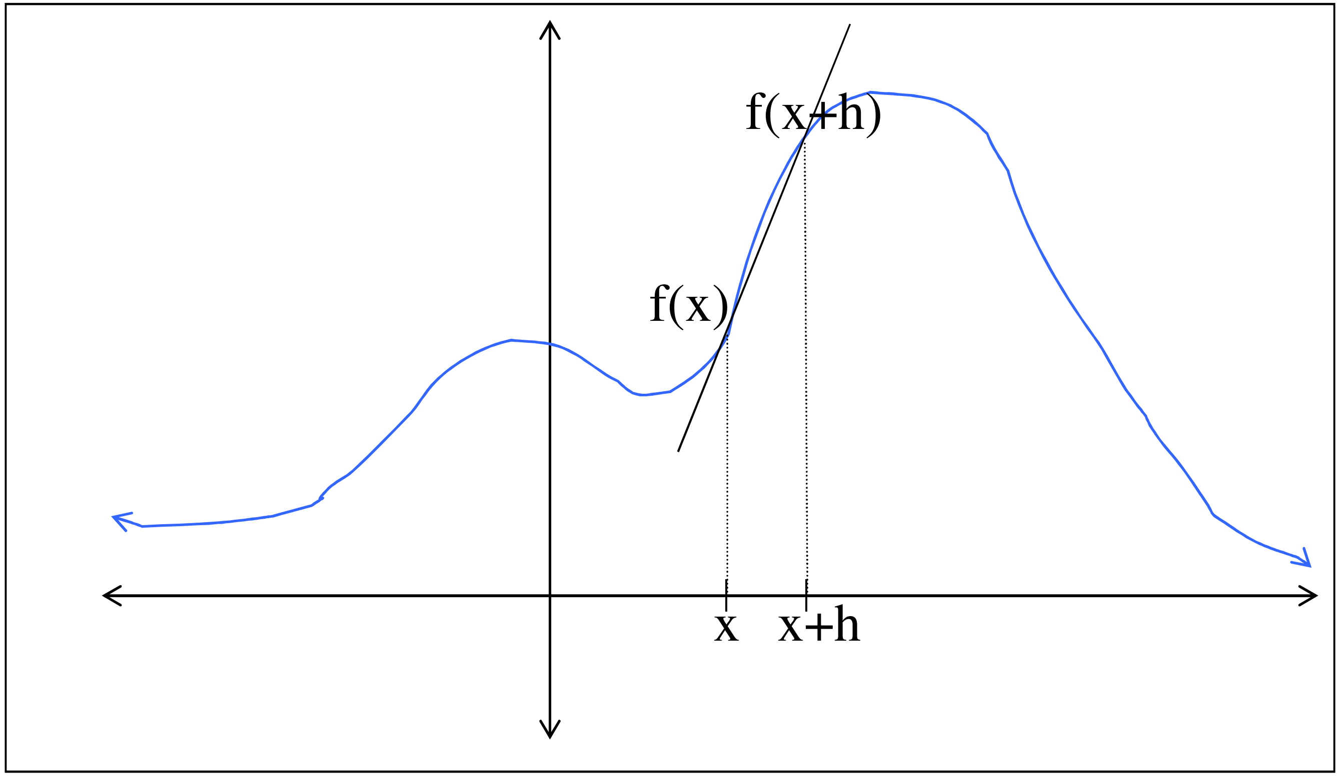
Turunan dan Garis Singgung

- Jika *h* semakin kecil, garis potong akan semakin dekat ke garis singgung.



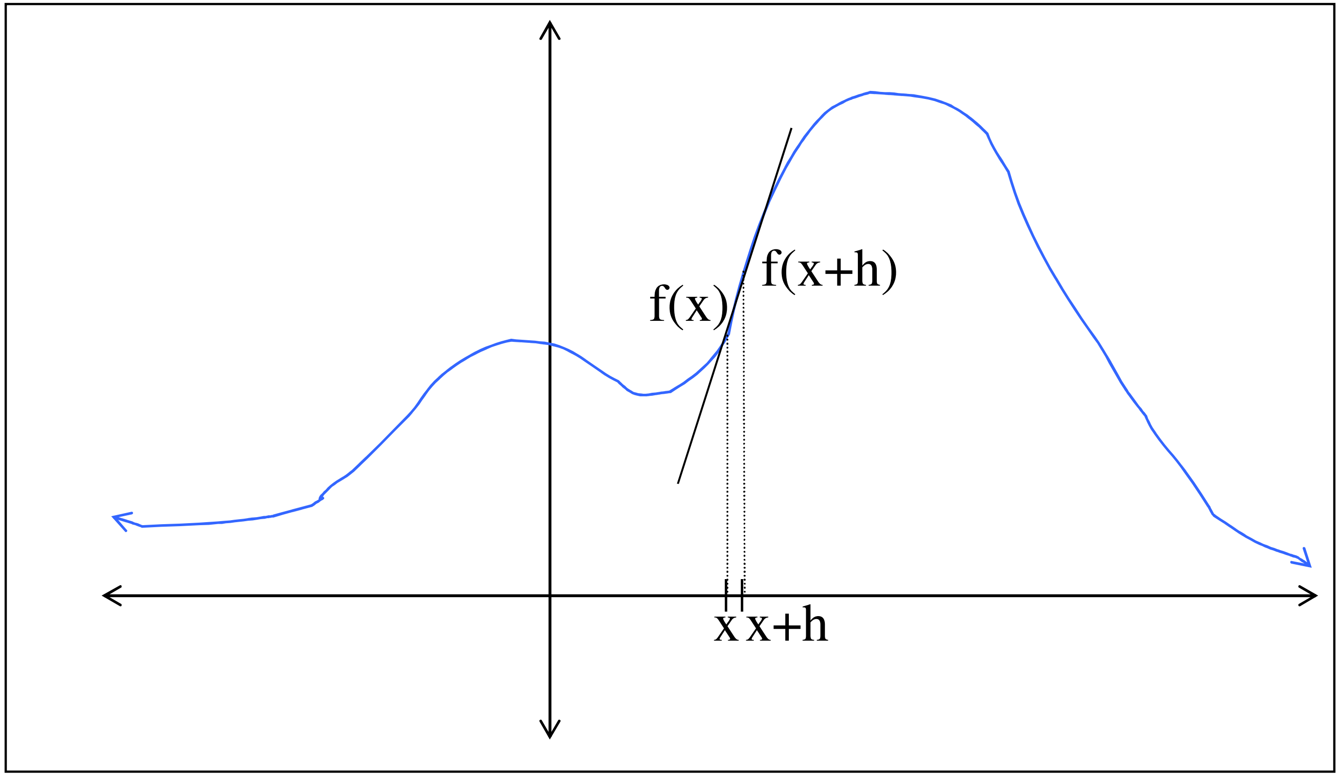
Turunan dan Garis Singgung

- Jika *h* semakin kecil, garis potong akan semakin dekat ke garis singgung



Turunan dan Garis Singgung

- Jika *h* semakin kecil, garis potong akan semakin dekat ke garis singgung



Turunan dan Garis Singgung

- Slope garis singgung:

$$m_{\mathrm{GS}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- **Slope garis singgung = Turunan!**
- Jadi,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Notasi Turunan

$f'(x)$	"*f* aksen *x*" atau "*f* prime of *x*" Notasi ini sering digunakan karena sangat ringkas.
$\dfrac{df}{dx}$	"df, dx" Notasi ini menekankan bahwa turunan merupakan laju perubahan *x* terhadap *f*.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	"do *f*, do *x*" atau "partial f, partial x" Notasi ini mirip dengan df/dx. Digunakan jika *f* bergantung pada lebih dari satu variabel bebas (turunan parsial).

Kenapa Turunan Penting?

- Laju perubahan merupakan konsep yang penting untuk diketahui (analisis statik komparatif)
  - Turunan dari *cost function* ialah *marginal cost*
  - Turunan dari *revenue function* ialah *marginal revenue*
  - Elastisitas
- Turunan menunjukkan naik/turunnya fungsi
  - $f'(x) > 0$: $f(x)$ naik
  - $f'(x) < 0$: $f(x)$ turun
- Yang terpenting: **Pengoptimuman!**

Aturan Pencarian Turunan

- Aturan fungsi konstan

$$f(x) = k, \text{ dengan } k \text{ konstanta} \rightarrow f'(x) = 0$$

- Aturan fungsi pangkat

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

- Aturan fungsi pangkat yang diperumum

$$f(x) = cx^n \rightarrow f'(x) = cnx^{n-1}$$

- Aturan tambah/kurang

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

Aturan Pencarian Turunan

- Aturan hasil kali

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$$

- Aturan hasil bagi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)=\frac{f'\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g'\left(x\right)}{\left[g\left(x\right)\right]^{2}}$$

- Contoh

Fungsi MR – Fungsi AR

- Diberikan fungsi *average revenue* (AR) sbb:

$$\text{AR} = 15 - Q.$$

- Diperoleh fungsi *revenue* (R) dan fungsi *marginal revenue* (MR):

$$R = \text{AR} \times Q = 15Q - Q^2$$

$$\text{MR} = 15 - 2Q.$$

- Secara umum, jika AR = $f(Q)$, maka

$$R = f(Q)Q$$

$$\text{MR} = \frac{dR}{dQ} = f'(Q)Q + f(Q).$$

Fungsi MC – Fungsi AC

- Fungsi biaya total (TC) dan fungsi biaya rata-rata (AC) diberikan oleh:

$$\mathrm{TC} = C(Q)$$

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{TC}}{Q} = \frac{C(Q)}{Q}.$$

- Laju perubahan AC terhadap Q diberikan oleh:

$$\frac{d\mathrm{AC}}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right] = \frac{C'(Q)Q - C(Q)}{Q^2}$$

$$= \frac{1}{Q}\left[C'(Q) - \frac{C(Q)}{Q}\right] = \frac{1}{Q}(\mathrm{MC} - \mathrm{AC}).$$

Aturan Rantai

- Misalkan $y = f(z)$ dan $z = g(x)$ maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

- Atau, jika $y = f(g(x))$ maka

$$y' = f'(g(x))g'(x)$$

- Contoh

Turunan Parsial

Misalkan diberikan fungsi banyak variabel

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

dengan variabel x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ adalah variabel-variabel bebas satu sama lain, maka turunan parsial y terhadap x_i adalah

$$f_i \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

- Dalam turunan parsial, jika variabel x_i berubah maka variabel-variabel lain dianggap tetap (konstan)
- Contoh

Model Supply-Demand

- Dari model supply-demand diperoleh

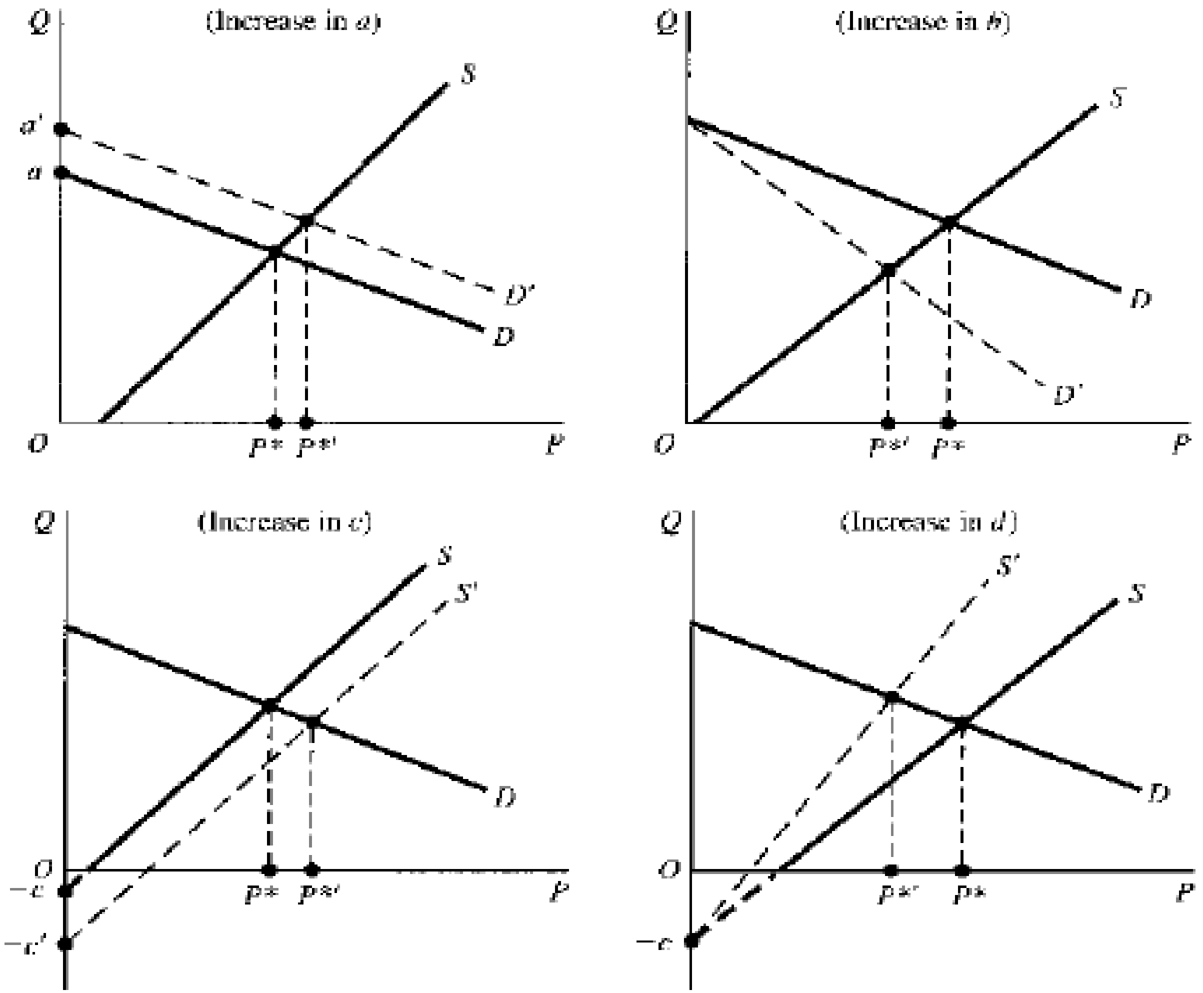
$$P^* = \frac{a+c}{b+d}, \quad Q^* = \frac{ad-bc}{b+d}.$$

- Analisis statik komparatif:

$$\frac{\partial P^*}{\partial a} = \frac{\partial P^*}{\partial c} = \frac{1}{b+d} > 0,$$
$$\frac{\partial P^*}{\partial b} = \frac{\partial P^*}{\partial d} = -\frac{a+c}{(b+d)^2} < 0.$$

- Terhadap Q^* dapat dilakukan analisis yang sama.

Model Supply-Demand



Model Pendapatan Nasional

- Diperoleh tingkat pendapatan kesetimbangan

$$Y^* = \frac{a - bc + I_0 + G_0}{1 - b + bd}.$$

- *Government-expenditure multiplier*:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - b + bd} > 0.$$

- *Nonincome-tax multiplier*:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial c} = \frac{-b}{1 - b + bd} < 0.$$

- Kenaikan *income tax rate* akan menurunkan *income* kesetimbangan

$$\frac{\partial Y^*}{\partial d} = \frac{-bY^*}{1 - b + bd} < 0.$$

Elastisitas

- **Elastisitas**: rasio persentase perubahan suatu variabel terhadap persentase perubahan variabel lain. Digunakan untuk mengukur kepekaan (*responsiveness*) suatu fungsi terhadap perubahan parameternya tanpa ada satuan (*unit-less*).
- Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$, elastisitas y terhadap x diberikan oleh

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{\Delta y / \Delta x}{y / x} \approx \frac{dy / dx}{y / x} = \frac{\text{fungsi marjinal}}{\text{fungsi rata-rata}}.$$

Elastisitas Permintaan

- Diberikan fungsi permintaan $Q = f(P)$. Elastisitas permintaan (*price elasticity of demand*) mengukur persentase perubahan permintaan barang akibat perubahan harga sebesar 1%.

$$\varepsilon_D = \frac{dQ / dP}{Q / P}.$$

- $|\varepsilon_D| > 1$ (elastis), $|\varepsilon_D| < 1$ (takelastis), $|\varepsilon_D| = 1$ (unit-elastis)
- Elastisitas penawaran (*price elasticity of supply*) didefinisikan secara serupa
- Tentukan ε_D jika fungsi permintaan $Q = 100 - 2P$.
- Tentukan ε_S jika fungsi penawaran $Q = P^2 + 7P$.

Turunan Total

Misalkan diberikan fungsi n variabel

$$U = U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

maka diferensial total dari fungsi U adalah

$$dU = U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + \cdots + U_n dx_n$$

dengan $U_i = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}$.

Contoh:

1. $U = 7x_1^2 x_2^3$
2. $U = -5x^3 - 15xy + 5y^4$
3. $U = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_1 x_2}$

MRTS

- Diberikan fungsi produksi $y = f(x_1,x_2)$. Kurva isokuan menggambarkan kombinasi input yang menghasilkan tingkat output yang sama. Di sepanjang kurva isokuan berlaku $dy = 0$.
- Slope kurva isokuan dapat ditentukan dengan menentukan $dy = 0$:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}.$$

- Negatif dari slope disebut MRTS (*marginal rate of technical substitution*) yang menggambarkan banyaknya input yang harus dikurangi akibat penambahan 1 unit input lain.

$$\text{MRTS} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}.$$

MRTS

- Tentukan isokuan dari fungsi produksi Cobb-Douglas:

$$y = \beta L^{\alpha} K^{1-\alpha}.$$

Turunan Implisit

Suatu fungsi yang dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$ dinamakan fungsi eksplisit, misalkan

$$y = f(x) = 5x^2,$$

tetapi jika dituliskan dalam bentuk $y - f(x) = 0$ dinamakan fungsi implisit, misalkan

$$y - 5x^2 = 0.$$

Tidak semua fungsi implisit dapat dinyatakan sebagai fungsi eksplisit, misalkan

$$\sin\left(x^2y + 5y\right) - xy^3 + 5x^2 = 2x - y.$$

Turunan Implisit

Misalkan diberikan fungsi implisit $F(y,x) = 0$ dengan $y = f(x)$, maka dengan menurunkan kedua ruas terhadap x diperoleh

$$dF = 0$$

sehingga dari diferensial total diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

sehingga

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Turunan Implisit

Contoh: Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ jika

1. $x^3 + y^3 = 6xy$.

2. $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$.